МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

17 май 2010 г. – Вариант 1

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи.**

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А ~~Б~~ В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А ● ~~В~~ Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълните решения с необходимите обосновки.

Чертежите в теста са само за илюстрация. Те не са начертани в мащаб и не са предназначени за директно измерване на дължини на страни и мерки на ъгли.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

<u>*Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!*</u>

1. Кое от посочените числа е най-голямо?

А) $\sqrt[4]{32}$ **Б)** $\sqrt[5]{32}$ **В)** $\left(2^5\right)^{\frac{1}{2}}$ **Г)** $2^{-\frac{5}{2}}$

2. Изразът $\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)^{-1}$ **е равен на:**

А) $\sqrt{7}+2\sqrt{2}$ **Б)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **В)** $-\sqrt{7}-2\sqrt{2}$ **Г)** $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$

3. Изразът $\dfrac{x-4}{16-x^2}:\dfrac{x(x-1)}{x^2-4}$ **е дефиниран при:**

А) $x\neq\pm4$

Б) $x\neq\pm4$**,** $x\neq\pm2$

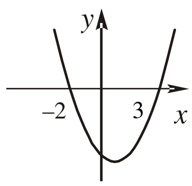
В) $x\neq\pm4$**,** $x\neq\pm2$**,** $x\neq1$

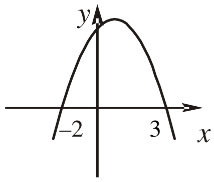
Г) $x\neq\pm4$**,** $x\neq\pm2$**,** $x\neq1$**,** $x\neq0$

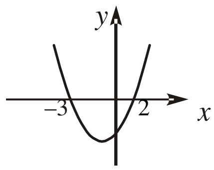
4. Решенията на неравенството $x^2-4x+3<0$ **са:**

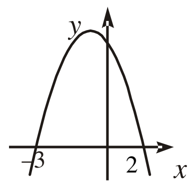
А) $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ **Б)** $x\in(1;3)$ **В)** $x\in\phi$ **Г)** $x\in(-\infty;+\infty)$

5. Графиката на функцията $y=6-x-x^2$ **е:**

А) 

Б) 

В) 

Г) 

6. Каква е функцията $f(x)=x^2-7x+5$ **в интервала** $(3;4)$**?**

А) само растяща **Б) само намаляваща**

В) константа **Г) намаляваща и растяща**

7. Решенията на уравнението $|x+1|\sqrt{x-1}=0$ **са:**

А) само 1 **Б) само** -1 **В)** -1 **и** 1 **Г)** $x\in\phi$

8. Стойността на израза $\log_2 32-\log_{\frac{1}{3}}9+\lg 0{,}001$ **е равна на:**

А) 0 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 10

9. Стойността на израза $1+\cos(180^\circ-\alpha)+\sin\left(90^\circ+\alpha\right)+\sin^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ$ **е:**

А) 1 **Б)** 2 **В)** 0 **Г)** 3

10. Стойността на израза $\dfrac{\cos 30^\circ \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ \cos 75^\circ - \cos 30^\circ \sin 75^\circ}$ **е:**

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Б)** 1 **В)** 0 **Г)** -1

11. Ако $\div a_1, a_2, a_2, \ldots$ **и** $a_4+a_{13}=49$**, то сборът** $a_1+a_6+a_{11}+a_{16}$ **е :**

А) 49 **Б)** 98 **В)** 147 **Г)** 196

12. Ако средноаритметичното на числата $a_1, a_2, \ldots, a_6, a_7$ **е равно на** 1**, а средноаритметичното на числата** $a_1, a_2, \ldots, a_6$ **е равно на** -1**, то числото** a_7 **е равно на:**

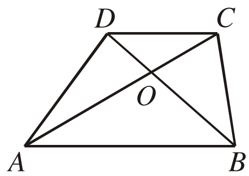
А) 0 **Б)** 1 **В)** 8 **Г)** 13

13. Решенията на системата $\begin{vmatrix} x^2+y^2=41 \\ x+y=9 \end{vmatrix}$ **са:**

А) $(-4;-5);\ (-5;-4)$ **Б)** $(4;-5);\ (-5;4)$

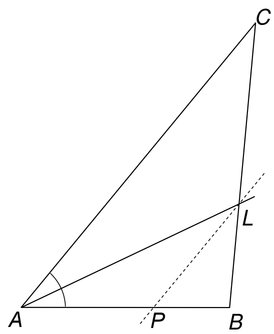
В) $(-4;5);\ \ (5;-4)$ **Г)** $(4;5);\ \ (5;4)$

14. В трапец *ABCD* $(AB \parallel CD)$ **диагоналите се пресичат в точка *O* и** $AC:OC=5:2$**. Ако** $AB=30$ **cm, то** CD **е:**



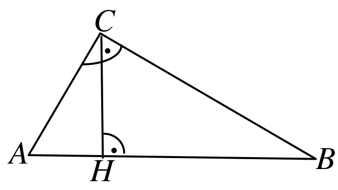
А) 12 cm **Б)** 15 cm **В)** 20 cm **Г)** 24 cm

15. Даден е $\triangle ABC$ **със страни** $AB=12$ **и** $AC=15$**. Построена е ъглополовящата** $AL\left(L\in BC\right)$ **и през точка** L **е построена права** $LP(P\in AB)$ **и** $LP \parallel AC$**. Отношението** $S_{\triangle LPB}:S_{\triangle ABC}$ **е равно на:**



А) $\dfrac{4}{5}$ **Б)** $\dfrac{4}{9}$ **В)** $\dfrac{16}{25}$ **Г)** $\dfrac{16}{81}$

16. На чертежа CH е височината към хипотенузата AB на правоъгълен триъгълник ABC. Ако $AH = 36$ и $HB = 64$, дължината на катета AC е равна на:

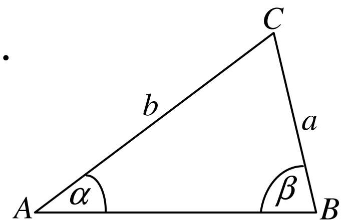


А) 80 **Б)** 60

В) 48 **Г)** 30

17. За триъгълника на чертежа е дадено, че $\sin\alpha : \sin\beta = \sqrt{2} : 2$.

За дължините на страните a и b е изпълнено:



А) $a = 2b$ **Б)** $a = \sqrt{2}b$ **В)** $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ **Г)** $a = \frac{1}{2}b$

18. В успоредник $ABCD$ $AB = 8$ cm, $AD = 7$ cm. Ако $\sphericalangle BAD = 60^\circ$, то дължината на диагонала AC е:

А) $\sqrt{57}$ cm **Б)** 13 cm **В)** 15 cm **Г)** $\sqrt{337}$ cm

19. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, а $AB = 3$ cm. Ако радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm, дължината на страната AC е равна на:

А) 5 cm **Б)** 7 cm **В)** 8 cm **Г)** $\sqrt{79}$ cm

20. Окръжност с радиус 4 cm е вписана в равнобедрен трапец. Ако малката основа на трапеца е равна на радиуса на окръжността, лицето на трапеца е:

А) 80 cm^2 **Б)** 96 cm^2 **В)** 160 cm^2 **Г)** 192 cm^2

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. За членовете на геометрична прогресия е дадено, че $a_3.a_4.a_5 = 2^9$. Намерете четвъртия член на прогресията.

22. В равнобедрен $\triangle ABC(AC = BC)$, за който $\cos\sphericalangle BAC = \frac{1}{5}$, е вписана окръжност с радиус $r = 1$cm. Намерете лицето на $\triangle ABC$.

23. Да се намери лицето на успоредник със страни 3cm и 5cm и ъгъл между диагоналите 45^o.

24. Намерете номера n на най-големия член на редицата, зададена с формулата $a_n = 6n - n^2 - 5$.

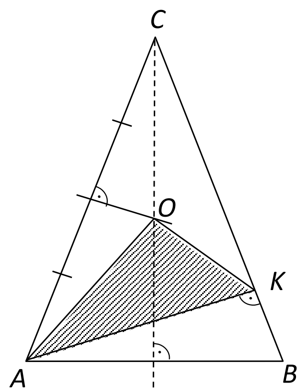
25. На една полица има 20 книги, като между тях са и два тома от събрани съчинения на един автор. Намерете вероятността, при случайно подреждане на книгите, двата тома да са един до друг.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се намерят сборът и произведението на реалните корени на уравнението $\left(\frac{x^2}{x-1}+1\right)^2 - 9\left(\frac{x^2}{x-1}+1\right) = 10$.

27. Иван е забравил паролата на компютъра на брат си. Той помни, че тя се записва само с първите две букви на азбуката и съдържа шест, седем или осем символа. Ако всеки път Иван опитва различна парола, то колко най-много опити може да направи той, за да открие паролата на брат си?

28. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Построена е височината AK ($K \in BC$). Нека точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност. Да се намери $S_{\triangle AOK}$, ако $AB = 6$, а $\sphericalangle BAC = 75^\circ$.



ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; $\quad$ при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $\quad a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x\Leftrightarrow a^x=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$; $\quad$ при $\quad b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $\quad P_n=1.2.3...(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $\quad V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $\qquad P(A)=\dfrac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}}$ $\qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $\quad a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $\quad a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad a^2 = a_1 c$ $\quad b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1.b_1$ $\quad r = \frac{a+b-c}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $\quad m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $\quad l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $\quad S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta\mp 1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{cotg}2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

математика– 17 май 2010 г.

ВАРИАНТ № 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1.	**В**	2
2.	**В**	2
3.	**Г**	2
4.	**Б**	2
5.	**Г**	2
6.	**Г**	2
7.	**А**	2
8.	**Б**	2
9.	**Б**	2
10.	**Г**	2
11.	**Б**	2
12.	**Г**	2
13.	**Г**	2
14.	**В**	2
15.	**Г**	2
16.	**Б**	2
17.	**В**	2
18.	**Б**	2
19.	**В**	2
20.	**А**	2
21.	8	3
22.	$3\sqrt{6}\ \mathbf{cm}^2$	3
23.	$8\ \mathbf{cm}^2$	3
24.	$n=3$	3
25.	$\frac{P_2.P_{19}}{P_{20}}=\frac{2!.19!}{20!}=\frac{2.19!}{20.19!}=\frac{1}{10}$	3

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
26.	$x_1+x_2+x_3+x_4=7$ $x_1x_2x_3x_4=-18$	15
27.	$2^6+2^7+2^8=64+128+256=448$	15
28.	$\frac{9}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	15

Въпроси със свободен отговор

26. Критерии за оценяване на задача 26.

1. Полагане $t=\frac{x^2}{x-1}+1,\ x\neq 1.$ ***(2 т.)***

2. Получаване на квадратно уравнение спрямо t *:* $t^2 - 9t - 10 = 0$

с корени $t_1 = -1$ *и* $t_2 = 10$. *(2 т.)*

3. Получаване на уравненията $\frac{x^2}{x-1} + 1 = -1$ *и* $\frac{x^2}{x-1} + 1 = 10$,

т.е. $x^2 + 2x - 2 = 0$ *и* $x^2 - 9x + 9 = 0$. *(2 т.)*

4. Нека x_1 *и* x_2 *са реалните корени на уравнението*

$x^2 + 2x - 2 = 0$ $\left(D > 0, x_{1,2} \neq 1\right)$. *Тогава* $x_1 + x_2 = -2$ *и* $x_1 x_2 = -2$. *(3 т.)*

5. Нека x_3 *и* x_4 *са реалните корени на уравнението*

$x^2 - 9x + 9 = 0$ $\left(D > 0, x_{3,4} \neq 1\right)$ *Тогава* $x_3 + x_4 = 9$ *и* $x_3 x_4 = 9$. *(3 т.)*

6. Тогава $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 + 9 = 7$ *и* $x_1 x_2 x_3 x_4 = -2.9 = -18$. *(3 т.)*

Забележка: За намерени само корените x_1, x_2, x_3 *и* x_4 *(4 т.)*

27. Критерии за оценяване на задача 27.

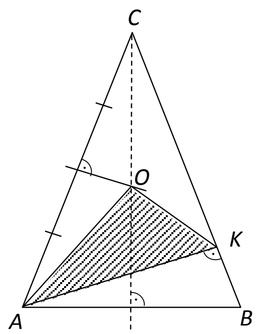
1. Всички шестсимволни пароли са $2.2.2.2.2.2 = 2^6$ *на брой* *(4 т.)*

2. Всички седемсимволни пароли са $2.2.2.2.2.2.2 = 2^7$ *на брой* *(4 т.)*

3. Всички осемсимволни пароли са $2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^8$ *на брой* *(4 т.)*

4. Броят на всички възможности е $2^6 + 2^7 + 2^8 = 64 + 128 + 256 = 448$ *(3 т.)*

28. Критерии за оценяване на задача 28.



1. Определяне на дължината на височината AK *в правоъгълния* $\triangle ABK$, $AK = 6\sin 75°$ *(2 т.)*

2. Определяне на $\sin 75^\circ = \sin\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$ *(3 т.)*

3. Намиране на отсечката AO *като радиус на описаната окръжност около* $\triangle ABC$, $AO = \frac{1}{2}\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 6$ *(3 т)*

4. Обосновка, че $\triangle AOC$ *е равнобедрен и* $\sphericalangle CAO = 15°$ *(2 т.)*

5. Определяне на мярката на $\measuredangle OAK = 45^\circ$ *(3 т.)*

6. Определяне на $S_{\triangle AOK} = \frac{1}{2} AO.AK \sin \measuredangle OAK = \frac{9}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$ *(2 т.)*

Забележка: Ако е прескочена стъпка 2 и лицето е изразено $S_{\triangle AOK} = \frac{1}{2} AO.AK \sin \measuredangle OAK$

$S_{\triangle AOK} = \frac{1}{2} 6.6.\sin 75°.\sin 45° = 9\left(\cos 30° - \cos 120°\right) = \frac{9}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$ *(5 т.)*